

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI TOÁN VÀO LỚP 10 HÀ NỘI NĂM 2013

Bài I: (2,0 điểm)

1) Với $x = 64$ ta có $A = \frac{2 + \sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2 + 8}{8} = \frac{5}{4}$

2)

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1) \cdot (x+\sqrt{x}) + (2\sqrt{x}+1) \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (x+\sqrt{x})} = \frac{x\sqrt{x} + 2x}{x\sqrt{x} + x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

3)

Với $x > 0$ ta có :

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 2 > 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4. \text{ (Do } x > 0)$$

Bài II: (2,0 điểm)

Đặt x (km/h) là vận tốc đi từ A đến B, vậy vận tốc đi từ B đến A là $x + 9$ (km/h)

Do giả thiết ta có:

$$\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} = 5 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{x} + \frac{10}{x+9} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(x+9) = 20(2x+9)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 31x - 180 = 0 \Leftrightarrow x = 36 \text{ (vì } x > 0)$$

Bài III: (2,0 điểm)

1) Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 3x + 3 + 2x + 4y = 4 \\ 4x + 4 - x - 2y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 11 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

2)

a) Với $m = 1$ ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 3 \text{ (Do } a - b + c = 0)$$

Ta có $y(-1) = \frac{1}{2}$; $y(3) = \frac{9}{2}$. Vậy tọa độ giao điểm A và B là $(-1; \frac{1}{2})$ và $(3; \frac{9}{2})$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \text{ (*)}$$

Đê (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt x_1, x_2 thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân

biệt. Khi đó $\Delta' = m^2 - m^2 + 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi $m > -1$ ta có $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Cách giải khác: Khi $m > -1$ ta có

$$|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta'}}{a'} - \frac{-b - \sqrt{\Delta'}}{a'} \right| = 2\sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2m+2}$$

$$\text{Do đó, yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow 2\sqrt{2m+2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{m+2} = 2 \Leftrightarrow 2m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Bài IV (3,5 điểm)

1/ Xét tứ giác AMON có hai góc đối

$$\widehat{ANO} = 90^\circ$$

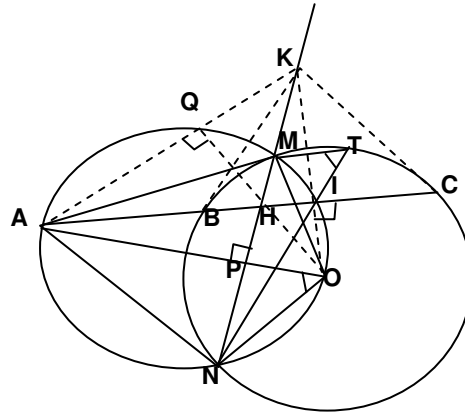
$\widehat{AMO} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

2/ Hai tam giác ABM và AMC đồng dạng nên ta có $AB \cdot AC = AM^2 = AN^2 = 6^2 = 36$

$$\Rightarrow AC = \frac{6^2}{AB} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow BC = AC - AB = 9 - 4 = 5 \text{ (cm)}$$

3/ $\widehat{MTN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{AON}$ (cùng chắn cung



MN trong đường tròn (O)), và $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$

(do 3 điểm N, I, M cùng nằm trên đường tròn đường kính AO và cùng chắn cung 90°)

Vậy $\widehat{AIN} = \widehat{MTI} = \widehat{TIC}$ nên $MT \parallel AC$ do có hai góc so le bằng nhau.

4/ Xét ΔAKO có AI vuông góc với KO. Hạ OQ vuông góc với AK. Gọi H là giao điểm của OQ và AI thì H là trực tâm của ΔAKO , nên KMH vuông góc với AO. Vì MHN vuông góc với AO nên đường thẳng KMHN vuông góc với AO, nên KM vuông góc với AO. Vậy K nằm trên đường thẳng cố định MN khi BC di chuyển.

Cách giải khác:

Ta có $KB^2 = KC^2 = KI \cdot KO$. Nên K nằm trên trục đẳng phương của 2 đường tròn tâm O và đường tròn đường kính AO. Vậy K nằm trên đường thẳng MN là trục đẳng phương của 2 đường tròn trên.

Bài IV: (0,5 điểm)

Từ giả thiết đã cho ta có $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6$. Theo bất đẳng thức Cauchy ta

có:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \frac{1}{ab}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{1}{bc}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \geq \frac{1}{ca}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + 1 \right) \geq \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + 1 \right) \geq \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + 1 \right) \geq \frac{1}{c}$$

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta có:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{3}{2} \geq 6 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq 3 \text{ (điều phải chứng minh)}$$