ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HOÁ

NĂM HỌC 2007-2008

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1. (1,5 *điểm*)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy=2(x+y) \\ 5yz=6(y+z) \\ 4zx=3(z+x). \end{cases}$

Câu 2. (2 *điểm*). Đội bóng bàn của trường A thi đấu với đội bóng bàn của trường B, mỗi đấu thủ của trường này thi đấu với mọi đấu thủ của trường kia 1 trận. Biết rằng tổng số trận đấu bằng 4 lần tổng số cầu thủ của cả hai đội và số cầu thủ của trường B là số lẻ. Tìm số cầu thủ của mỗi đội.

Câu 3. (3 *điểm*). Cho hai điểm A và B cố định trên đường tròn (O). C là điểm chính giữa cung AB, M là điểm chuyển động trên dây AB. Tia CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng

1) $AC^2 = CM.CD$.

2) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM thuộc một đường thẳng cố định.

3) Gọi R_1 và R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Chứng minh $R_1 + R_2$ là hằng số.

Câu 4. (2 *điểm*). Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(0\,;\,3)$, $B(4\,;\,0)$, $C\left(5\,;\,\frac{3}{4}\right)$ cùng với O tạo thành tứ giác lồi $AOBC$. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua A và chia tứ giác $AOBC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Câu 5. (1,5 *điểm*). Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên khác 0 thoả mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$ thì tích abc là lập phương của một số nguyên.

PHẠM NGỌC QUANG

(*Sở GD - ĐT Thanh Hoá*) giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN, THANH HÓA
Năm học 2007 - 2008

(Đề thi đã đăng trên THTT số 371, tháng 5 năm 2008)

Câu 1. • Nếu $x = 0$ thì $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

• Nếu $x \neq 0$ thì khi đó y, z khác 0, hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+z}{yz}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z+x}{zx}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \text{ suy ra } \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{6}.$$

Từ đó $\dfrac{1}{x}=1$, $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}$,

dẫn đến $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Vậy HPT có hai nghiệm $(x ; y ; z)$ là $(0 ; 0 ; 0)$; $(1 ; 2 ; 3)$.

Câu 2. Gọi x và y theo thứ tự là số cầu thủ của đội A và đội B ($x, y \in \mathbb{N}^*$, y lẻ. Số trận đấu là

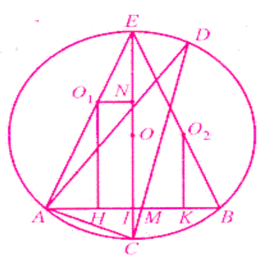
$$xy = 4(x + y) \Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 16.$$

Suy ra $x - 4$ và $y - 4$ là các ước số của 16. Do y lẻ nên $y - 4 = 1$, hay $y = 5$. Từ đó tìm được $x = 20$.

Vậy số cầu thủ của đội A là 20 và số cầu thủ của đội B là 5.

Câu 3. (h. 1)

1) Ta có $\Delta ACM \backsim \Delta DCA$ (vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ và $\widehat{ACD}$ chung). Suy ra $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{CM}{CA}$ hay $AC^2 = CM.CD$.



Hình 1

2) Vẽ đường kính CE. Vì $\widehat{CAM} = \widehat{CDA}$ nên AC là tiếp tuyến tại A của đường ngoại tiếp ΔADM. Do $AC \perp AE$, nên tâm đường tròn ngoại tiếp ΔADM nằm trên đường thẳng cố định AE.

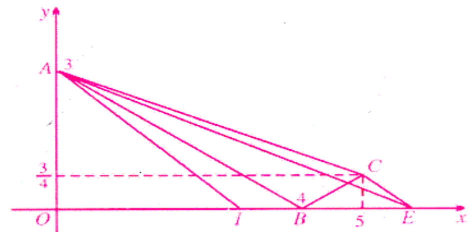
3) Tương tự phần 2, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBDM thuộc đường thẳng BE. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADM và BDM. Kẻ $O_1H \perp AB$, $O_2K \perp AB$. Khi đó H và K lần lượt là trung điểm của AM và MB. Suy ra $R_1 = O_1A$ và $R_2 = O_2B$.

Kẻ $O_1N \perp CE$ thì $O_1N = HI = AI - AH$

$= \dfrac{1}{2}(AB - AM) = \dfrac{1}{2}BM = KB.$

Vậy $\Delta ENO_1 = \Delta O_2KB \Rightarrow R_2 = O_2B = O_1E$, suy ra $R_1 + R_2 = AE$ (hằng số).

Câu 4. Nối A với B, từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt trục hoành tại E. Gọi I là trung điểm của OE (h. 2). Ta thấy $S_{AOI} = S_{AIE}$, $S_{EAB} = S_{CAB}$ nên $S_{AIE} = S_{AIBC}$. Từ đó AI chính là đường thẳng (d) đi qua A và chia tứ giác $AOBC$ thành hai phần có diện tích bằng nhau.



Hình 2

Ta viết phương trình đường thẳng đi qua A, B. Đường thẳng này có dạng: $y = ax + b$, vì nó đi qua $A(0 ; 3)$ nên $b = 3$, đi qua $B(4 ; 0)$, từ đó tính được $a = -\dfrac{3}{4}$. Đường thẳng đi qua $C\left(5;\dfrac{3}{5}\right)$ và song song với AB nên phương trình có dạng $y = -\dfrac{3}{4}x + n$. Thay tọa độ C vào ta có $n = \dfrac{9}{2}$. Đường thẳng này cắt trục Ox tại $E(6 ; 0)$. Vậy trung điểm I của OE có tọa độ $I(3 ; 0)$. Điều này chứng tỏ I nằm giữa O và B. Đường thẳng (d) đi qua A và I có phương trình là $y = -x + 3$.

Câu 5. Đặt $x^3 = \dfrac{a}{b}$, $y^3 = \dfrac{b}{c}$, $z^3 = \dfrac{c}{a}$. Từ giả thiết suy ra $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0.$

• Nếu $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ thì $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$ $\Rightarrow a = b = c$. Do đó $abc = a^3$ là lập phương của một số nguyên.

• Nếu $x + y + z = 0$ thì $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} + \sqrt[3]{\dfrac{b}{c}} + \sqrt[3]{\dfrac{c}{a}} = 0.$

Nhân hai vế lần lượt với $a\sqrt[3]{b^2c}$ và $b\sqrt[3]{ac^2}$ ta được $a\sqrt[3]{abc} + ab + \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 0$ và

$\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + b\sqrt[3]{abc} + bc = 0.$

Trừ theo vế hai hệ thức trên, ta được

$$(a - b)\sqrt[3]{abc} = b(c - a).$$

Nếu $a = b$ thì $a = b = c \Rightarrow x = y = z = 1$ (không thỏa mãn $x + y + z = 0$). Vậy $a \neq b$.

Do đó $abc = \left(\dfrac{b(c-a)}{a-b}\right)^3$ là lập phương số hữu tỉ. Nhưng do a, b, c là các số nguyên nên khi đó abc là lập phương của số nguyên.

PHẠM NGỌC QUANG
(Sở GD - ĐT Thanh Hoá) *giới thiệu*