ĐỀ THI VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU NGHỆ AN
NĂM HỌC 2007-2008

NGÀY THỨ 1
(*Thời gian làm bài:* 150 phút)

Câu 1. (2 *điểm*). Cho biểu thức

$$P = \frac{3x+\sqrt{9x}-3}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = 3+2\sqrt{2}$.

Câu 2. (2 *điểm*). Cho phương trình (m là tham số) $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 1 > 0$.

Câu 3. (2 *điểm*). a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7. \end{cases}$$

b) Cho x, y là các số dương thoả mãn $x + \frac{1}{y} \le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Câu 4. (2,5 *điểm*). Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^0$) có đường cao BD. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, BM và BD. Tia NI cắt cạnh AC tại K. Chứng minh rằng

a) Các tứ giác $ABMD$, $ABNK$ nội tiếp.

b) $BC^2 = \frac{4}{3}AC.CK$.

Câu 5. (1,5 *điểm*). Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AC, N là điểm thuộc đoạn thẳng MC sao cho $MN = \frac{1}{2}NC$. Biết rằng $\widehat{MBN} = \widehat{CBN}$.

Chứng minh rằng $\widehat{ABN} = 90^0$.

NGÀY THỨ 2
(*Thời gian làm bài:* 150 phút)

Câu 6. (3 *điểm*).

a) Giải phương trình $1 + \sqrt{1+x} = x^2$.

b) Cho đa thức bậc bốn $P(x)$ với các hệ số nguyên thoả mãn $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên x. Chứng minh các hệ số của $P(x)$ chia hết cho 7.

Câu 7. (2,5 *điểm*).

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 1 + x^3y^3 - 19x^3 = 0 \\ y + xy^2 + 6x^2 = 0. \end{cases}$

b) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \ge \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 8. (1 *điểm*). Trong một hình chữ nhật có diện tích bằng 5 chứa chín hình chữ nhật nhỏ, mỗi hình chữ nhật nhỏ có diện tích bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại hai hình chữ nhật nhỏ có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

Câu 9. (2,5 *điểm*). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AN và CK. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \neq B$). Gọi E là trung điểm của đoạn thẳng AC.

a) Chứng minh EK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN.

b) Chứng minh EM vuông góc với MB.

Câu 10. (1 *điểm*). Biết rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối và một đường chéo không lớn hơn $2\sqrt{2S}$ (S là diện tích tứ giác). Tính độ dài đường chéo còn lại theo S.

THÁI VIẾT THẢO
(*Sở GD&ĐT Nghệ An*)
Sưu tầm và giới thiệu

LỜI GIẢI ĐỀ THI VÀO LỚP 10
Trường THPT chuyên PHAN BỘI CHÂU, Nghệ An

NĂM HỌC 2007-2008

(Đề thi đăng trên THTT số 370, tháng 4 năm 2008)

NGÀY THỨ NHẤT

Câu 1. a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có

$$P=\frac{3x+3\sqrt{x}-3-(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\frac{x+3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

b) *Đáp số.* $P = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 2. a) $\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2 > 0, \forall m$, nên PT (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của PT(1). Theo định lí Viète có $x_1 + x_2 = 2m$. Do x_1 là nghiệm của PT (1) nên có $2x_1^2-4mx_1+2m^2-1=0$.

Lại có $Q=(2x_1^2-4mx_1+2m^2-1)+4m(x_1+x_2)$

$= 4m(x_1 + x_2) = 4m.2m = 8m^2$.

Ta có $Q > 0 \Leftrightarrow 8m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Vậy với $m \neq 0$ thì PT (1) có hai nghiệm phân biệt thoả mãn đề bài.

Câu 3. a) Đặt $u=\sqrt{x+1}$; $v=\sqrt{y}$ $(u \geq 0, v \geq 0)$.

Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ u.v=4. \end{cases}$

Suy ra $u = 2$; $v = 2$, từ đó $x = 3$ và $y = 4$. Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (3 ; 4)$.

b) Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

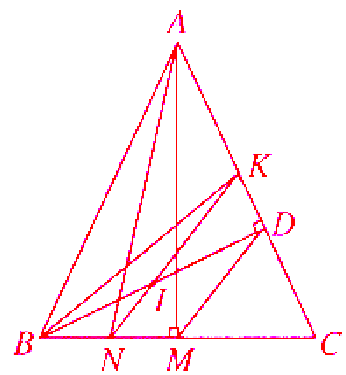
$1 \geq x+\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}}$, suy ra $\frac{y}{x} \geq 4$ (1)

Áp dụng (1) và BĐT Cauchy cho hai số dương ta có

$$A=\frac{x}{y}+\frac{y}{16x}+\frac{15y}{16x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}.\frac{y}{16x}}+\frac{15.4}{16}=\frac{17}{4}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2$.

Câu 4. (h. 1). Do tam giác ABC cân tại A nên $AM \perp BM$. Lại có $BD \perp AD$, do đó tứ giác $ABMD$ nội tiếp.



Hình 1

Mặt khác, NI là đường trung bình của tam giác BMD nên $NI // MD$. Do đó $\widehat{KNC} = \widehat{DMC}$.

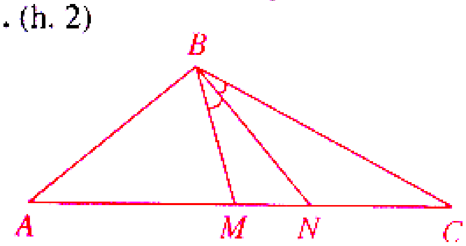
Hơn nữa $\widehat{DMC} = \widehat{KAB}$ (tính chất tứ giác nội tiếp $ABMD$). Suy ra $\widehat{KNC} = \widehat{KAB}$ (1)

Vậy tứ giác $ABNK$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{NKC} = \widehat{ABC}$ (tứ giác $ABNK$ nội tiếp). Từ đây và từ (1) có $\Delta ABC \backsim \Delta NKC$.

Suy ra $\frac{BC}{CK}=\frac{AC}{NC}$. Mặt khác, dễ thấy $NC=\frac{3}{4}BC$, do đó $BC^2 = \frac{4}{3}BC.NC = \frac{4}{3}AC.CK$.

Câu 5. (h. 2)



Hình 2

Do BN là tia phân giác trong góc B của tam giác BMC nên $\frac{BM}{BC}=\frac{NM}{NC}=\frac{1}{2}$.

Lại có $\frac{AM}{AC}=\frac{1}{2}=\frac{BM}{BC}$, suy ra BA là tia phân giác ngoài của tam giác BMC.

Theo tính chất của hai đường phân giác trong và phân giác ngoài suy ra $BN \perp BA$ (đpcm).

NGÀY THỨ HAI

Câu 6. a) Ta có PT đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ 1+x=(x^2-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge 1 \\ x(x+1)(x^2-x-1)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) Gọi đa thức đã cho là
$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $(a\neq 0)$.

Từ giả thiết ta có $e=P(0)\vdots 7$;
$P(2)-P(1)+P(-2)-P(-1)=3a\vdots 7$, do đó $a\vdots 7$;
$P(2)-P(1)-P(-2)+P(-1)=3b\vdots 7$, do đó $b\vdots 7$;
$c=P(1)+P(-1)-2e-a\vdots 7$;
$d=P(1)-P(-1)-b\vdots 7$, suy ra đpcm.

Câu 7. a) Nhân PT thứ nhất của hệ với 6, nhân PT thứ hai của hệ với $19x$ rồi cộng lại được

$6(xy)^3+19(xy)^2+19xy+6=0$
$\Leftrightarrow (xy+1)(2xy+3)(3xy+2)=0$.

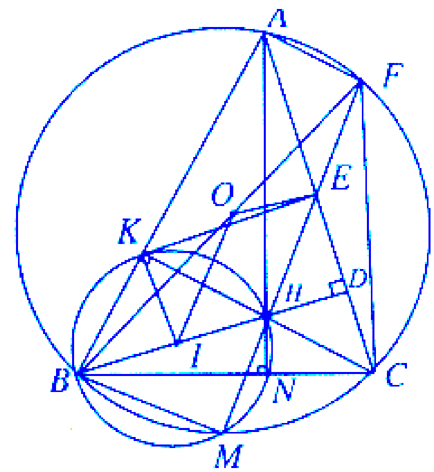
- Với $xy=-1$, thay vào PT thứ nhất của hệ được $x=0$ (không thoả mãn).
- Với $xy=-\frac{2}{3}$, tìm được $(x\,;y)=\left(\frac{1}{3};-2\right)$.
- Với $xy=-\frac{3}{2}$, tìm được $(x\,;y)=\left(-\frac{1}{2};3\right)$.

b) Đặt A là vế trái BĐT cần chứng minh. Ta có

$$A=a-\frac{ab^2}{1+b^2}+b-\frac{bc^2}{1+c^2}+c-\frac{ca^2}{1+a^2}$$
$$=3-\left(\frac{ab^2}{1+b^2}+\frac{bc^2}{1+c^2}+\frac{ca^2}{1+a^2}\right)$$
$$\ge 3-\left(\frac{ab^2}{2b}+\frac{bc^2}{2c}+\frac{ca^2}{2a}\right)\ge 3-\frac{(a+b+c)^2}{6}=\frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Câu 9. a)



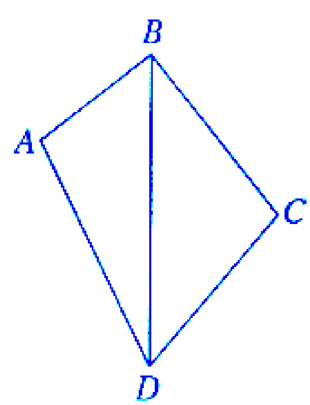
Hình 3

Ta có tứ giác $BNHK$ nội tiếp đường tròn đường kính BH ($\widehat{BKH}=\widehat{BNH}=90^\circ$). Gọi I là trung điểm của BH. Các tam giác KBH và KAC vuông nên $\widehat{IKH}=\widehat{IHK}$ và $\widehat{EKC}=\widehat{KCE}$. Lại có $\widehat{IHK}=\widehat{DHC}$ từ đó có $\widehat{EKC}+\widehat{HKI}=$ hay $EK\perp KI$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Kẻ đường kính BF của đường tròn (O). Dễ thấy tứ giác $AHCF$ là hình bình hành nên E là trung điểm của HF. Theo tính chất đường trung bình ta có $OI \parallel EH$. Mặt khác $OI\perp BM$ (đường nối tâm hai đường tròn vuông góc với dây cung chung). Do đó $EH\perp BM$. Lại có $HM\perp BM$ (do BH là đường kính đường tròn (I)), suy ra E, H, M thẳng hàng và $EM\perp BM$.

Câu 10. Giả sử tứ giác lồi $ABCD$ thoả mãn $AD+BC+BD \le 2\sqrt{2S}$ (h. 4).



Ta thấy,

$2S\le BD(AD+BC)$
$\le\left(\frac{AD+BC+BD}{2}\right)^2$ (*)

Câu 8. a) *Phản chứng.* Giả sử bất kì hai hình chữ nhật nào trong chín hình chữ nhật nhỏ H_1, H_2,..., H_9 đều có diện tích phần chung nhỏ hơn $\frac{1}{9}$.

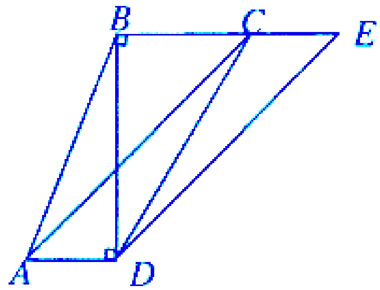
Khi đó diện tích phần H_2 không bị phủ bởi H_1 lớn hơn $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$; diện tích phần H_3 không bị phủ bởi H_1 và H_2 lớn hơn $1-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=\frac{7}{9}$;... ; diện tích phần H_9 không bị phủ bởi H_1, ..., H_8 lớn hơn $\frac{1}{9}$. Như vậy diện tích của hình chữ nhật lớn lớn hơn $1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+...+\frac{1}{9}=5$ (vô lí).

Vậy $AD+BC+BD \geq 2\sqrt{2S}$.

Hình 4

Từ đó $AD + BC + BD = 2\sqrt{2S}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức ở (*) xảy ra, tức là khi $AD \perp BD$, $BC \perp BD$ và $AD + BC = BD$ (h. 5).



Hình 5

Dựng hình bình hành $CADE$ ta có ΔBDE vuông cân tại B.

Do đó $AC = DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{S}$.

THÁI VIẾT THẢO

(*Sở GD-ĐT Nghệ An*) giới thiệu.

SƯU TẦM